Chapitre 3 : Le déterminant

Rappel: Pour
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in n_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

A inversible \iff det $(A) \neq 0$
où dét $(A) = ad - bc$

Introduction 3.1

Définition 30 (matrice des cofacteurs).

Soit n > 1 et $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La matrice $A_{ij} \in M_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la *i*-ème ligne et la *j*-ème colonne de A s'appelle la matricedes cofacteurs de A par rapport à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Exemples

xemples

1. Soct
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in n_{3\times 3} (\mathbb{R})$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in n_{2\times 2} (\mathbb{R})$$
2. Soit
$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix} \text{ et det } (B) = 1k - 15 = -1$$

Définition 31 (déterminant).

On appelle déterminant d'ordre n l'application $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui associe à toute matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ son déterminant. Ce dernier est défini "par récurrence" de la manière suivante :

- Le déterminant <u>d'ordre 1</u> d'une matrice $A = (a) \in \underline{M_{1\times 1}(\mathbb{R})}$ est défini par $\det(A) = a$.
- Supposons que le déterminant d'ordre n-1 ait été défini pour un entier n>1. Alors le déterminant d'ordre n d'une matrice $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est défini par ...

Remarque det(A) peut aussi s'écrire |A| ou $det(\vec{a_1}, \dots \vec{a_n})$ où les $\vec{a_i}$ sont les colonnes de A.

Exemple pour
$$n = 2$$
 Si $A = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.12 \\ 0.21 & 0.22 \end{bmatrix}$, alors

det $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0.41 \\ 0.41 & 0.41 \end{bmatrix}$
 $= (-1)^2 Q_{11} \det(A_{11}) + (-1)^3 Q_{21} \det(A_{21})$
 $= Q_{11} \cdot Q_{22} - Q_{21} \cdot Q_{12}$

Noyen mnémotechaique: $|A| = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.12 \\ 0.21 & 0.22 \end{bmatrix}$

Exemple pour
$$n = 3$$

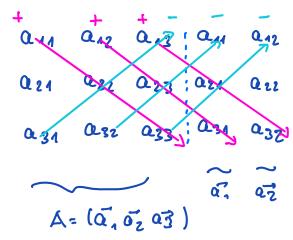
| A | = | Q₁₁ Q₁₂ Q₁₃ | Q₂₁ Q₂₁ Q₂₂ Q₂₃ | Q₃₄ Q₃₄ Q₃₂ Q₃₃ |

Exemple avec
$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -12 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$def(A) = 1 \cdot \left| \frac{40}{3-2} \right| - 0 \cdot \left| \frac{40}{3-2} \right| + (-2) \cdot \left| \frac{40}{-42} \right|$$

$$= (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (4 \cdot 2 - (-1) \cdot 0)$$

Calcul pour les matrices 3 × 3 : la règle de Sarrus



$$\det(A) = \alpha_{44} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{42} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{34} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{2i} \alpha_{32} \\ - \alpha_{34} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{43} - \alpha_{32} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{44} - \alpha_{32} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{42}$$

⚠ Celle règle ne fonctionne que pour les matrices 3 x 3!

$$del(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 3$$

$$- (-2)(-1) \cdot 0 - 3 \cdot 2 - 1 - (-2) \cdot 0 \cdot 4$$

$$= 2 - 16 - 6 = -20$$