Chapitre 3 : Le déterminant

Rappel : Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

A inversible $\iff \det(A) \neq 0$

où $\det(A) = ad - bc$

3.1 Introduction

Définition 30 (matrice des cofacteurs)**.**
Soit $n > 1$ et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La matrice $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A s'appelle la *matrice des cofacteurs* de A par rapport à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

   $A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

   $B_{22} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$ et $\det(B) = 14 - 15 = -1$

Définition 31 (déterminant).
On appelle *déterminant* d'ordre n l'application $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui associe à toute matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ son déterminant. Ce dernier est défini "par récurrence" de la manière suivante :

- Le déterminant d'ordre 1 d'une matrice $A = (a) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$ est défini par det(A) = a.
- Supposons que le déterminant d'ordre $n-1$ ait été défini pour un entier $n > 1$. Alors le déterminant d'ordre n d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est défini par ...

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\cdot \det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31}) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}\det(A_{n1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) \qquad (*)$$

(développement par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne)

Remarque det(A) peut aussi s'écrire $|A|$ ou det $(\vec{a_1}, \ldots \vec{a_n})$ où les $\vec{a_i}$ sont les colonnes de A.

Exemple pour $n = 2$ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1})$$

$$= (-1)^2 a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^3 a_{21} \det(A_{21})$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

Moyen mnémotechnique : $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $\ominus$ $\oplus$

Exemple pour $n = 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + a_{31} \det(A_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32}$$

$$+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Exemple avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(-2) - 3\cdot 2 - 2\cdot(4\cdot 2 - (-1)\cdot 0)$$

$$= 2 - 6 - 16 = \underline{\underline{-20}}$$

Calcul pour les matrices 3 × 3 : la règle de Sarrus

On écrit

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & - \; - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}} & \sim \vec{a}_1 & \sim \vec{a}_2 \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

⚠ Cette règle ne fonctionne que pour les matrices 3 × 3 !

<u>Exemple:</u>

$$\begin{array}{ccc:cc} 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & -2 & 3 \end{array}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 3$$
$$- (-2)(-1) \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \cdot 4$$
$$= 2 - 16 - 6 = \underline{\underline{-20}}$$